Skript

Lineare Gleichungen und Lineare Gleichungssysteme

Emir Kujović
2016

„Lernen, ohne zu denken ist verlorene Mühe.
Denken, ohne etwas gelernt zu haben, ist gefährlich.“

Dies ist denen gewidmet, die beides tun möchten.

Information

Zu viel oder zu wenig Text? Dieses Skript soll dabei helfen die Dinge aus dem Unterricht tiefer zu verstehen und nachzuarbeiten. Um etwas zu begreifen braucht man Klärungen. Daher wird hier versucht, mit genügend Worten zu beschreiben, aber es dennoch so kurz zu lassen, dass es nicht mühselig wird, es durchzulesen.

Rechnen ohne Verständnis ist sinnlos, Verständnis ohne Übung ist aber nicht die ganze Miete. Erreicht man mit Hilfe des Unterrichts und des Skripts ein gewisses Verständnis und denkt sich „Jetzt hab ich es!“ ist das sehr lohnenswert. Dennoch kann es passieren, dass man nicht ausreichend auf eine Klausur vorbereitet ist, da Verständnis im Kopf nicht die Fertigkeiten auf dem Papier ersetzt. Für eine gute Note bzw. eine niedrige Fehlerquote müssen sich bestimmte Rechenwege einschleifen und geben erst dann Sicherheit.
Meistens überspringen viele das Verständnis und üben das Rechnen. Wie viel schöner kann es sein, wenn man tatsächlich verstanden hat, was man rechnet? Daher ist das erreichte Verständnis nicht umsonst! Es braucht deutlich weniger Rechenübungen, wenn man im Kopf begriffen hat wie es geht. Nur soll man ermahnt sein, dass thematische Erkenntnis manchmal nicht ganz ausreicht, um keine Fehler mehr zu machen.

Im ersten Kapitel findet ihr für so gut wie alle Aspekte der linearen Funktionen Erklärungen und Videos.So könnt ihr euch auch einen guten Überblick über das gesamte Thema verschaffen.

Inhaltsverzeichnis

1 Lineare Funktionen

1.1 Begrifflichkeiten

In vorherigen Klassen habt ihr euch schon mit linearen Funktionen[1] [2] [3] beschäftigt. Folgende Dinge sind notwendig oder sehr nützlich, da es auch im Thema „Quadratische Funktionen“ (QF) immer wieder um lineare Funktionen geht. Außerdem kann man zwischen diesen beiden Funktionsarten Verknüpfungen erstellen, da vieles ähnlich ist.

- **Was ist eine Funktion?**
  Eine Funktion gibt mir zu einem x-Wert einen y-Wert. Zum Beispiel sagst du mir den Wert $x = 5$. Ich schaue in meine Funktion $y = 2x + 7$. Ich setze dort den Wert 5 für x ein und erhalte $y = 2 \cdot 5 + 7$. Also gehört zu dem Wert $x = 5$ der $y = 17$. Da diese beiden Werte jetzt zusammen gehören, sagt man auch, dass ein y einem x zugeordnet wird.
  Wem das zu kompliziert erscheint, stellt sich einen Club vor. Der Eintritt kostet 7 Euro. Jeder Drink in dem Laden kostet 2 Euro. x ist die Anzahl der Drinks, die ich trinke. y ist dann der Gesamtpreis (Eintritt + Getränkekosten). Will ich in diesem Club 5 Drinks trinken ($x = 5$), zahle ich insgesamt 17 Euro ($y = 17$).
  Mehr dazu hier: Video: https://www.youtube.com/watch?v=myLx0d5wmHw.

  Übrigens: Ob man $f(x)$ oder y schreibt ist egal. Es bedeutet das gleiche. Wer endlich verstehen will, was $f(x)$ bedeutet, bitte sehr: das f steht für Funktion. Der Ausdruck $f(5) = 17$ heißt„ dass zum Wert $x = 5$ der Wert $y = 17$ gehört. Also verwandelt f die 5 in eine 17. Das macht f, indem ich den Wert x in $2x + 7$ einsetze. Das gilt für jedes x. Also bedeutet $f(x) = 2x + 7$: **Diese Funktion f sorgt dafür, dass zu einem Wert x der Wert $2x + 7$ gehört.**[4]

- **Was ist eine Variable?**
  Die Variable ist x. Denn ich weiß noch nicht, wie viele Drinks ich trinken werde. Dort können also verschiedene Zahlen eingesetzt werden. y ist zwar auch eine Variable. Allerdings hängt sie durch die Funktionsgleichung immer von x ab.

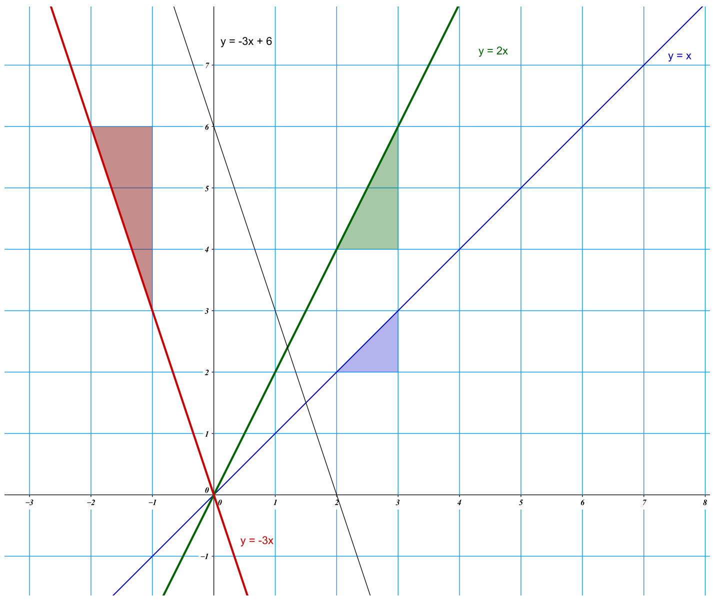
- **Was sind Parameter?**
  Alle linearen Funktionen haben die Form wie unsere Club-Funktion $y = 2x + 7$. Allgemein schreibt man $y = mx + n$. In einer bestimmten Aufgabe sind diese Zahlen/Parameter m und n festgelegt. m sagt mir, wie groß die Steigung ist. n sagt mir, wie groß der $y-$Achsenabschnitt ist. Das ist die Stelle, wo der Graph die y-Achse schneidet. Falls du wissen möchtest, wie man mit zwei Punkten die Geradengleichung hinkriegt, also die Parameter bestimmt, schau dir das an: Video: https://www.youtube.com/watch?v=bJkloJrITZg.

[1] einen guten Überblick über Lineare Funktionen: Video: https://www.youtube.com/watch?v=MgUqwCat-Ho.
[2] Schnittpunktberechnung hier: Video: https://www.youtube.com/watch?v=ZrFE3LRisn0.
[3] Beispiele für verschiedene LF hier: Video: https://www.youtube.com/watch?v=ZPkajkiR4WM.
[4] Man darf auch schreiben: $f(5) = 2 \cdot 5 + 7 = 17$. In Klammern vorne steht also die Zahl die man für x einsetzt.

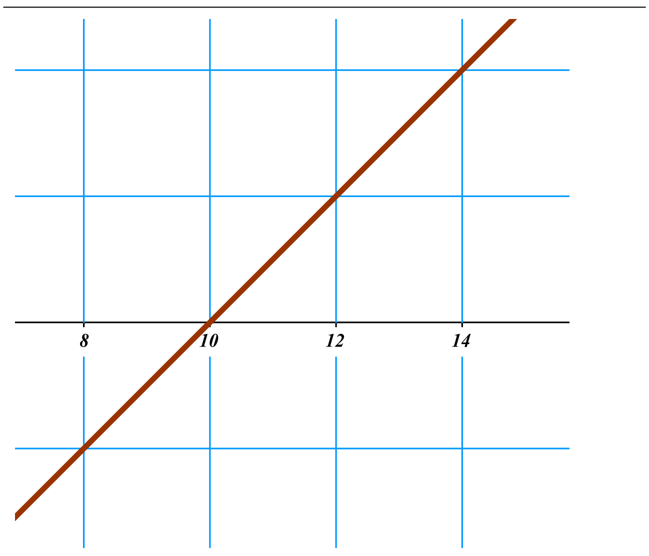
- **Was ist die Steigung?**
  m sagt mir, wie steil ein Graph (bei linearen Funktionen immer eine Gerade) ansteigt. Schau dir dazu die Abbildung an. Der grüne Graph hat eine größere Steigung als der blaue. Wandert man beim grünen eine Einheit nach rechts (x), wächst er ganze zwei Einheiten nach oben (y). Also ist

  $$m_{grün} = \frac{2}{1} > \frac{1}{1} = m_{blau}.$$

  Je mehr Einheiten man also bei einer x-Einheit nach oben steigt, desto größer die Steigung. Deshalb nennt man die eingezeichneten Dreiecke auch Steigungsdreiecke. Ist die Steigung negativ, fällt der Graph (im Bild z.B. der rote Graph.) Haben zwei Graphen die gleiche Steigung, so steigen sie gleich an und sind somit parallel (vergleiche schwarz und rot).



- **Nullstellen**[a] sind die Stellen, wo der Graph die x-Achse schneidet. Im Bild wird diese Achse an der Stelle $x = 10$ geschnitten. Diese Punkt hat die Koordinaten (10|0). Jede Nullstelle hat den Wert $y = 0$! Eben gerade, weil wir uns auf der x-Achse befinden. Deshalb kann man so eine Stelle herausfinden, indem man in die Funktionsgleichung für y die Zahl 0 einsetzt.



[a] Linearen Graph zeichnen und Nullstelle berechnen im Video: https://www.youtube.com/watch?v=MmR6dFxrTwo.

1.2 1. Klassenarbeit

04.10.2016

Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme **Klasse 9f, E-Kurs**

Hat eine Aufgabe ein * so ist eine Rechnung oder Begründung notwendig. Sonst gibt es Punktabzug. Die Arbeit besitzt zusätzlich 4 Ordnungspunkte.

9P

1. Fülle die Wertetabellen aus und zeichne die Funktionen in ein gemeinsames beschriftetes Koordinatensystem.

a)

x	-2	-1	0	1	2
y= - x+2,5					

b)

x	-1	0	1	2	3
y= 2x -2					

c) Lies den Schnittpunkt der zwei Geraden ab und schreibe ihn auf: S(|)

6P

2*. Löse die Gleichungen nach y auf. Schreibe jeweils zwei Punkte für jede Gleichung auf, die Lösungen der Funktion sind.

a) $7x + 14y = 28$

b) $5x - y = 100$

8P

3.

a) Zeichne die Funktion $y=0{,}5\,x + 3{,}5$.

b) Liegt der Punkt A (3 | 5,5) auf der Geraden?

c*) Vervollständige den Punkt, sodass er auf der Geraden liegt: (20 |)

d*) Bestimme die Nullstelle der Funktion.

6P

4*. Berechne jeweils die Nullstelle und gib den y-Achsenabschnitt an.

a) $10x + y = -10$

b) $5x = 20\,y$

8P

5. Edmund Julio überlegt welchen Datentarif er für das mobile Surfen am Handy haben möchte. Nach 1Gb Datenvolumen inklusive wird das Surfen nicht langsamer sondern kostet zusätzlich.

Tarif 1: 1Gb Datenvolumen kostet 10€. Jede weitere Einheit kostet 50ct.

Tarif 2: 1Gb Datenvolumen kostet 8€. Jede weitere Einheit kostet 1€.

a) Stelle pro Tarif eine Gleichung auf.

b*) Ab wie vielen Einheiten wird Tarif 1 günstiger?

1.3 Was muss ich wissen aus der 1.Arbeit

Hier wird beschrieben, was man für Dinge aus der 1. Klassenarbeit wissen sollte. Das ist deshalb sinnvoll, weil man dann eine Art To-do-Liste hat. Kann man alle diese Sachen, die da drauf stehen, darf man das gute Gefühl haben, nichts mehr versäumt zu haben. Wenn du dir die einzelnen Aufgaben anschaust, geht es um folgende Punkte. In Grün findet ihr die Sachen, die ihr schon im Unterricht wiederholt habt. Zu jedem der Punkte erhaltet ihr einen Videolink, wo ihr nochmal erklärt bekommt, wie es geht!

1. *Nr.1* Wertetabelle berechnen
   https://www.youtube.com/watch?v=dTyHA1RR0BQ
   https://www.youtube.com/watch?v=tywU-wn6tF4
2. *Nr.1* Funktion zeichnen anhand von Punkten
   https://www.youtube.com/watch?v=dTyHA1RR0BQ
   https://www.youtube.com/watch?v=tywU-wn6tF4
3. *Nr.1c* Punkt aus Zeichnung ablesen
   https://www.youtube.com/watch?v=ztHl-WjLKNI
4. *Nr.2* Gleichung nach y auflösen
   In der Aufgabe hat man zwei Variablen und kann nur umstellen, denn es werden immer zwei Variablen übrig bleiben. Anders ist es, wenn man nur einen Buchstaben hat! Dann kann man diesen allein auf eine Seite bringen und auf der rechten Seite steht dann eine Zahl. Dies nennt man dann "Gleichung lösen". Wenn man zwei Variablen hat, kann man also nicht einfach am Ende einen Wert für die Variablen bekommen. Das alles läuft aber nach den gleichen Rechengesetzen ab. Wenn man das eine kann, kann man das andere auch.
   https://www.youtube.com/watch?v=K8CNFqlxeM0

   Beispiel, wenn man nach y auflösen möchte:

$$\begin{aligned} -\mathbf{18x} + 3y &= 12 && \mid -18x \text{nach rechts: Vorzeichen ändern!} \\ 3y &= +\mathbf{18x} + 12 && \mid :3 \rightarrow \text{alles rechts durch 3 teilen} \\ y &= 6x + 4 \end{aligned}$$

5. *Nr.2* Aus einer Gleichung Punkte bestimmen, die auf der Gerade dazu liegen (das Gleiche wie das, was man bei einer Wertetabelle macht, x-Wert ausdenken, einsetzen, und y ausrechnen.)
6. *Nr.3a* Funktion mit Hilfe eines Steigungsdreiecks zeichnen
   https://www.youtube.com/watch?v=lwK3PkL4TMc
7. *Nr.3b* Wieder ablesen, ob ein Punkt auf eine Linie liegt. Es ist das Gleiche wie Punkt 3. Man muss das aber eigentlich auch rechnerisch lösen können.
   https://www.youtube.com/watch?v=KRoOBKOjmRQ

8. *Nr.3c* $y-$ Wert zu einem $x-$Wert bestimmen. Das ist das Gleiche wie Punkt 1 und Punkt 5. $\rightarrow$ Einsetzen!

9. *Nr.3d/4a* Nullstelle bestimmen
   https://www.youtube.com/watch?v=KW9yWfyFICE

10. *Nr.4* Den $y-$Achsenabschnitt bestimmen. Normalerweise kann man den ablesen. Hier muss aber erst nach y umstellen. Also das, was in Punkt 4 gebraucht wird. Im Beispiel $y = 6x + 4$ ist der y-Achsenabschnitt 4.

11. *Nr.5a* Funktionsgleichungen aus dem Text ablesen

12. *Nr.5b* Den Schnittpunkt zwischen zwei Geraden/linearen Funktionen bestimmen. Das ist im Grunde schon das neue Thema. Aber wir haben damals schon die ersten Methoden angesprochen. Denn da gibt es verschiedene.

2 Lineare Gleichungssysteme

Hat man mehrere (meistens nur 2) Funktionen/Lineare Gleichungen/Geraden so kann man eine gemeinsame Lösung zwischen ihnen finden. Zeichnet man sie als gerade Linien auf, geht es um den Schnittpunkt aller Linien, also um den Punkt, der auf allen Linien/Funktionen drauf ist. Findt man diesen Punkt kann man ihn in jede der Gleichungen einsetzen und es kommt was Richtiges/Wahres heraus.

2.1 Welche Verfahren gibt es?

Es gibt verschiedene Methoden den Schnittpunkt zu finden:

- Alle Funktionen zeichnen und einen gemeinsamen Schnittpunkt suchen und ablesen.
- Die Methode die am meisten Zeit erfordert ist Wertetabellen zu erstellen für jede Funktionen und zu schauen, ob es dort einen gemeinsamen Punkt $(x|y)$ in allen Tabellen gibt. Dies kann schief laufen, wenn der Schnittpunkt krumme Werte hat, aber die Tabellen nur schöne ganze Zahlen enthalten.
- Gleichsetzungsverfahren
- Einsetzungsverfahren
- Additonsverfahren

Bei den drei letzten Verfahren ist folgendes gemeinsam: Am Anfang hat man zwei Gleichungen mit zwei Variablen. Dann sorgt man dafür, dass eine Variable wegfällt und nur eine Gleichung mit einer Variable da steht! Diese Gleichung löst man auf und hat dann eine Lösung (entweder x oder y). Mittels Einsetzen in einer der Gleichungen erhält man die Lösung für die andere Variable.

2.2 Gleichsetzungsverfahren

https://www.youtube.com/watch?v=6BuVmbuxZco
https://www.youtube.com/watch?v=3YChSkp59bs

1. **Beide nach x oder beide nach y**
   Die Gleichungen müssen **beide** nach x oder y umgestellt sein. **Wenn das schon so ist gehts sofort weiter mit Schritt 2**. Wenn das noch nicht so ist, dann muss man das erst tun! Im Beispiel werden beide nach x umgeformt.

$$\begin{array}{rl} 2x+4y=10 & \mid -4y \\ x+y=4 & \mid -y \\ \hline 2x=10-4y & \mid :2 \\ x=4-y & \\ \hline x=5-2y & \\ x=4-y & \end{array}$$

2. **Gleichsetzen**

$$5-2y=4-y \qquad \mid +y \quad \mid -5$$

3. **Variablen nach links, Zahlen nach rechts**

$$-2y+y=4-5 \qquad \mid -4y \quad \mid$$

4. **Ausrechnen**

$$\begin{array}{rl} -1y=-1 & \mid :(-1) \\ \color{red}{y=1} & \end{array}$$

5. **Einsetzen**
   Oft nimmt man eine der beiden Gleichungen ganz am Anfang. Man darf aber auch alle anderen Gleichungen nehmen, die man in Schritt 1 findet. Am einfachsten ist

$$\begin{array}{c} x=4-y \\ x=4-1 \\ \color{red}{x=3} \end{array}$$

2.3 Einsetzungsverfahren

https://www.youtube.com/watch?v=bCjT3wDXf50
https://www.youtube.com/watch?v=Z7qYLUneKHg

2.4 Additonsverfahren

https://www.youtube.com/watch?v=T08IjF7OPf4
https://www.youtube.com/watch?v=VIPSfRsOFk4

2.5 Gibt es immer eine Lösung?

Wenn es wirklich einen Schnittpunkt gibt, dann bekommt man für x und y einen Wert heraus. Aber es gibt zwei Sonderfälle.

1. Wenn zwei Linien parallel sind, dann können sie keinen Schnittpunkt haben.Du erkennst am Parameter m (gleiche Steigung) ob sie parallel sind. In diesem Fall erhält man keinen Wert für x sondern am Ende des Verfahrens steht eine falsche Aussage wie z.B. $3 = 5$.

2. Manchmal sieht es so aus, als hätte man zwei verschiedene Funktionen. In Wirklichkeit aber ist es ein und die selbe. Aber durch Umstellen oder gleichwertige Umformungen sehen sie verschieden aus. Natürlich kann eine Linie keinen Schnittpunkt mit sich selbst haben. Auch hier erhält man keinen Wert für x. Am Ende der Verfahrens steht dann eine wahre Aussage wie z.B. $9 = 9$. Manchmal spricht man in diesem Fall auch von unendlich vielen Lösungen.