6. Mehrstufige Zufallsexperimente

Beim Roulette kann man auf Rot oder Schwarz setzen. Wenn fünf Mal hintereinander Rot fällt, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in der nächste Runde Schwarz fällt?

Nach diesem Kapitel kannst du …

- mehrstufige Zufallsexperimente in einem Baumdiagramm übersichtlich darstellen,
- Wahrscheinlichkeiten für mehrstufige Zufallsexperimente berechnen.

Lösungen
↗ S. 226

Brüche, Dezimalzahlen, Prozentangaben

1. Gib den Bruch als Dezimalzahl sowie in Prozentschreibweise an.

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{7}{10}$ d) $\frac{3}{50}$ e) $\frac{18}{20}$ f) $\frac{12}{40}$

2. Gib als Bruch an, kürze vollständig.

a) 0,2 b) 0,25 c) 0,02 d) 0,125 e) 0,72 f) 0,06

3. Gib die Prozentangabe als Bruch und als Dezimalzahl an.

a) 1 % b) 25 % c) 75 % d) 40 % e) 22 % f) 30 %

4. Berechne die fehlenden Angaben in jeder Spalte.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
Prozentangabe	10 %				8 %			125 %
Bruch mit Nenner 100		$\frac{20}{100}$						
Bruch (gekürzt)				$\frac{4}{5}$			$\frac{3}{2}$	
Dezimalzahl			0,04			0,6		

Mit Brüchen und Dezimalzahlen rechnen

5. Berechne.

a) $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$ b) $5 \cdot \frac{1}{6}$ c) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$ d) $\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7}$ e) $6 \cdot \frac{3}{48}$

f) $\frac{1}{8} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{3}{8}$ g) $\frac{3}{4} \cdot 0{,}5$ h) $0{,}25 \cdot \frac{2}{5}$ i) $0{,}1 \cdot \frac{3}{4}$ j) $4 \cdot \frac{2}{5} \cdot 0{,}6$

6. Multipliziere.

a) $0{,}8 \cdot 0{,}5$ b) $0{,}6 \cdot 0{,}2$ c) $0{,}25 \cdot 0{,}3$ d) $0{,}7 \cdot 0{,}02$ e) $0{,}17 \cdot 0 \cdot 0{,}3$

7. Addiere oder subtrahiere die Brüche.

a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ b) $\frac{5}{8} - \frac{1}{4}$ c) $\frac{2}{3} + \frac{5}{9}$ d) $\frac{1}{20} + \frac{1}{10} + \frac{2}{5}$ e) $\frac{1}{4} + \frac{3}{8} - \frac{1}{2}$

8. Berechne.

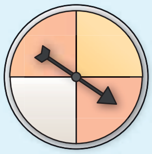
a) $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$ b) $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7}$ c) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}$ d) $\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6}$ e) $\frac{4}{7} \cdot \frac{7}{8} + \frac{7}{8} \cdot \frac{3}{7}$

Zufallsexperimente

9. Entscheide, ob es sich um ein Zufallsexperiment handelt. Begründe.

a) Aus einem Schuhschrank werden im Dunkeln zwei Schuhe genommen.
b) Am 24. 12. ist schulfrei.
c) Aus einer Spielesammlung wird mit verbundenen Augen eine Halmafigur herausgenommen.
d) Eine Stoppuhr wird gestoppt.

10. Gib die möglichen Ergebnisse an.
a) Das Glücksrad in der Abbildung wird gedreht.
b) Zwei Münzen werden geworfen.
c) Es werden zwei Murmeln aus einem Beutel gezogen, in dem sich zwei rote, zwei grüne und zwei gelbe Murmeln befinden.

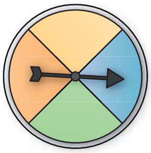
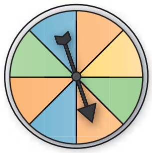


11. Gib an, was die größeren Chancen beim einmaligen Würfeln mit einem Spielwürfel hat.
① Würfeln einer Primzahl ② Würfeln einer durch 3 teilbaren Zahl
Begründe deine Antwort, indem du die Anzahl der möglichen Ergebnisse betrachtest.

Laplace-Experimente

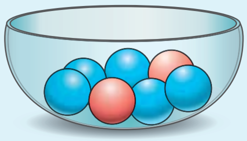
12. Entscheide und begründe, ob es sich um ein Laplace-Experiment handelt.
a) Eine Münze wird geworfen.
b) Ein Legostein wird geworfen.
c) Eine Reißzwecke wird geworfen.
d) Aus 32 Spielkarten wird eine Karte gezogen.

13. a) Handelt es sich beim Drehen des jeweiligen Glücksrades um ein Laplace-Experiment?
b) Gib für jedes Glücksrad die Wahrscheinlichkeit für „Gelb“ an.
c) Zeichne ein Glücksrad mit vier Farben und acht Feldern, mit dem man ein Laplace-Experiment durchführen kann.

①

②


14. Gib ein Laplace-Experiment mit folgender Wahrscheinlichkeit für jedes Ergebnis an.
a) 50 % b) $\frac{1}{6}$ c) 0,25 d) $\frac{1}{36}$

15. Ines soll mit verbundenen Augen eine Kugel aus der Schale ziehen.
a) Handelt es sich um ein Laplace-Experiment?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine blaue Kugel zu ziehen?
c) Wie könnte man das Experiment verändern, sodass es ein Laplace-Experiment ist? Begründe deinen Vorschlag.



Vermischtes

16. Ordne der Größe nach. Beginne mit der kleinsten Zahl.
a) 0,7; 50 %; $\frac{9}{8}$; $1\frac{3}{4}$ b) 125 %; 0,9; $1\frac{1}{2}$; 1,7; 1 % c) 0,75; $0{,}1^2$; $\frac{1}{10}$; $1\frac{1}{4}$; 120 %

17. Bezahl 2, nimm 3. Wie viele Möglichkeiten gibt es, drei Flaschen aus den drei Angebotssäften zu wählen?

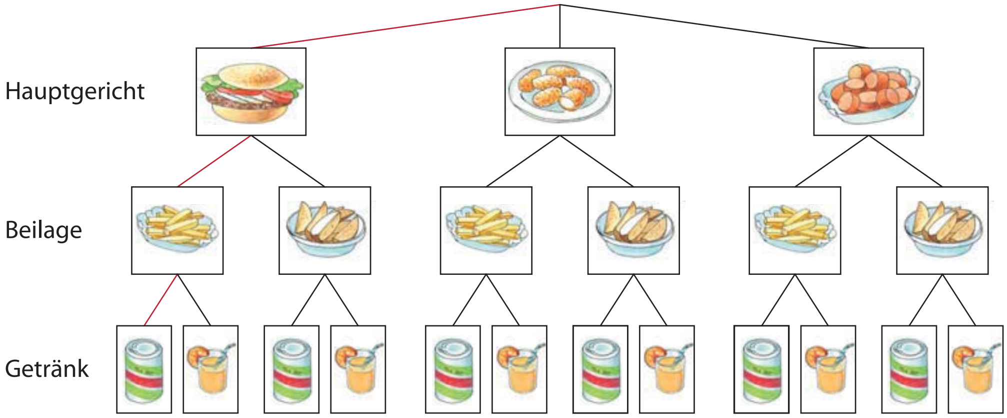
18. Gib an, wie viele verschiedene dreistellige Zahlen man aus den Ziffern 1, 2 und 3 bilden kann.

6.1 Baumdiagramme

■ Ein Musikanbieter bietet Abos mit 3, 6 und 12 Monaten Laufzeit an. In jedem Abo gibt es die Optionen „Standard" und „Premium". Zwischen wie vielen Möglichkeiten kann man insgesamt wählen? ■

Bei einem Take-away-Imbiss kann man sich sein eigenes Spar-Menü zusammenstellen: Zur Auswahl stehen ein Classic Burger oder Chicken Nuggets oder Curry-Wurst. Dazu kann man Pommes oder Potato Wedges und ein 0,5-ℓ-Getränk oder ein Smoothie wählen.

Mit einem **Baumdiagramm** lassen sich alle Möglichkeiten für ein Menü darstellen:



Jeder Pfad durch den Baum entspricht einer Menükombination. Zum Beispiel steht der rote Pfad für die Menükombination Classic Burger, Pommes und ein 0,5-ℓ-Getränk.
Die Anzahl der unterschiedlichen Menüs erhält man, indem man die Möglichkeiten der einzelnen Stufen multipliziert. Es gibt also $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ Möglichkeiten, ein Menü zusammenzustellen.

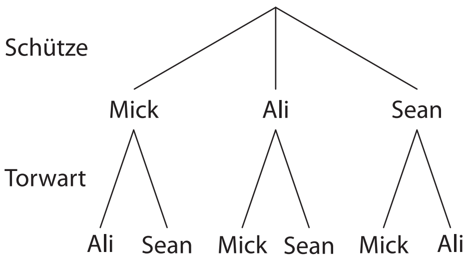
Wissen: Baumdiagramm – Zählprinzip
Ein Vorgang, aus dem sich unterschiedliche **Kombinationsmöglichkeiten** ergeben, kann gut in einem mehrstufigen **Baumdiagramm** dargestellt werden.
Die **Gesamtzahl der Möglichkeiten** entspricht der Anzahl der Baumenden.
Die Gesamtzahl ist das Produkt aus den Anzahlen der Möglichkeiten auf jeder Stufe.

Beispiel 1: Mick, Ali und Sean wollen Elfmeterschießen üben. Wie viele Möglichkeiten gibt es, einen Schützen und einen Torwart zu bestimmen? Zeichne ein Baumdiagramm.

Hinweis:
Bei einem Baumdiagramm muss man immer darauf achten, ob die Wahl auf einer Stufe die weiteren Wahlmöglichkeiten einschränkt.

Lösung:
Es gibt 3 Möglichkeiten, einen Schützen zu bestimmen. Anschließend gibt es nur noch 2 Möglichkeiten für den Torwart, da der Schütze nicht gleichzeitig Torwart sein kann.

Multipliziere die Anzahl der Möglichkeiten in beiden Stufen, um die Anzahl aller Möglichkeiten zu erhalten.



Es gibt $3 \cdot 2 = 6$ Möglichkeiten.

Basisaufgaben

1. Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus vier T-Shirts und zwei Hosen auszuwählen?
a) Stelle alle Möglichkeiten in einem Baumdiagramm dar.
b) Bestimme die Anzahl der Kombinationsmöglichkeiten auch rechnerisch.
c) Wie verändert sich die Anzahl der Möglichkeiten, wenn ein Hose dazu kommt?

2. Beim Werfen einer Münze kann diese „Kopf“ oder „Zahl“ zeigen. Eine Münze wird dreimal nacheinander geworfen.
a) Zeichne ein dreistufiges Baumdiagramm mit allen möglichen Ergebnissen.
b) Wie viele Möglichkeiten gibt es insgesamt?

3. Ole, Mia, Tom, Ben und Lea machen ein Wettrennen. Stelle alle Möglichkeiten für die ersten beiden Plätze in einem Baumdiagramm dar. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

Weiterführende Aufgaben

4. In einem Salsa-Kurs sind 12 Jungen und 14 Mädchen. Wie viele mögliche Tanzpaare gibt es?

5. Stolperstelle: In der Klasse 8c soll aus 20 Schülern ein Schülersprecher und ein Stellvertreter gewählt werden. Lenny meint: „Für jeden Posten gibt es 20 mögliche Schüler. Insgesamt sind es also $20 \cdot 20 = 400$ Möglichkeiten.“ Erkläre, warum das nicht stimmt, und korrigiere.

6. Wie viele verschiedene dreistellige Zahlen lassen sich aus den Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5 bilden,
a) wenn jede Ziffer mehrfach vorkommen kann,
b) wenn jede Ziffer nur einmal vorkommen darf?

7. Bei einem Musikfestival treten sechs Musikgruppen auf. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Reihenfolge, in der die Gruppen auftreten?

8. Anna hat für ihr Fahrrad ein vierstelliges Zahlenschloss mit den Ziffern von 0 bis 9.
a) Wie viele verschiedene Zahlenkombinationen kann sie im Schloss einstellen?
b) Ein Fahrraddieb benötigt etwa zwei Sekunden, um eine Kombination zu prüfen. Wie lange dauert es, bis er alle Zahlenkombinationen ausprobiert hat?

● **9.** In Phils Zimmer hängen vier Bilder. Er überlegt, die Bilder umzuhängen.
a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die vier Bilder auf die vier Plätze zu verteilen?
b) Wie ändert sich die Anzahl der Möglichkeiten, wenn Phil nur drei Bilder wieder aufhängt?

● **10. Ausblick:** Bei einem Volleyball-Turnier soll jedes Team einmal gegen jedes andere Team spielen. Wie viele Spiele gibt es insgesamt, wenn sechs Teams (zehn Teams) teilnehmen?

6.2 Wahrscheinlichkeiten bei Baumdiagrammen

■ In einer Lostrommel liegen noch 5 Lose. Chris, Mia, Loreen, Paula und Karl dürfen ziehen und alle wissen, dass noch genau 2 Gewinne enthalten sind. Chris und Mia ziehen zuerst und haben beide ein Gewinnlos. Jetzt beschweren sich die drei anderen und sagen: „Wir hatten ja gar keine Chance, den Gewinn zu ziehen." Was sagst du dazu? ■

Ein Zufallsexperiment, bei dem aus einer Lostrommel nacheinander mehrere Lose gezogen werden oder bei dem mehrfach gewürfelt wird, nennt man ein **mehrstufiges Zufallsexperiment**. Die Ergebnisse dieser Zufallsexperimente sind **zusammengesetzte Ergebnisse**, zum Beispiel beim Ziehen von 5 Losen (Gewinn; Niete; Gewinn; Niete; Niete) oder beim zweifachen Würfeln (3; 5).

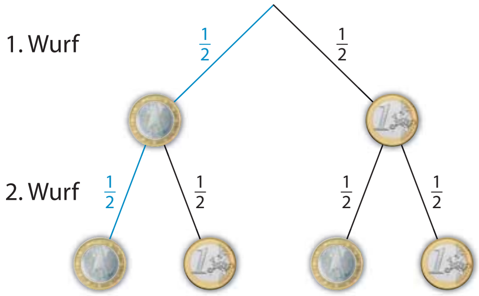
Pfadmultiplikationsregel

Besonders übersichtlich lassen sich mehrstufige Zufallsexperimente in einem **Baumdiagramm** darstellen. So kann man beispielsweise das zweifache Werfen einer Münze durch das folgende Baumdiagramm darstellen.

Zu jedem der Ergebnisse gehört ein **Pfad**, der oben an der „Wurzel" beginnt und bis nach unten durchläuft. Der Pfad für das Ergebnis (Kopf; Kopf) ist blau gefärbt.

Beim 1. und beim 2. Wurf sind die Teilergebnisse „Kopf" oder „Zahl" mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ (50 %) möglich. Die Wahrscheinlichkeiten werden jeweils an den Zweigen notiert.

Die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis (Kopf; Kopf) beträgt 50 % von 50 % = 25 %, also $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 25\,\%$.

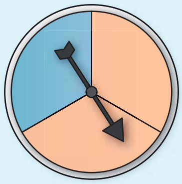


Ergebnis	Wahrscheinlichkeit
(Kopf; Kopf)	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 25\,\%$
(Kopf; Zahl)	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 25\,\%$
(Zahl; Kopf)	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 25\,\%$
(Zahl; Zahl)	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 25\,\%$

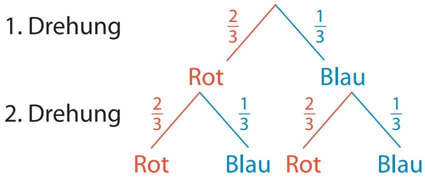
Wissen: Pfadmultiplikationsregel
Die **Wahrscheinlichkeit für ein zusammengesetztes Ergebnis** erhält man, indem man die Einzelwahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades multipliziert.

Für mehrstufige Zufallsexperimente gilt:
- Die Wahrscheinlichkeiten der zusammengesetzten Ergebnisse am Ende der Pfade addieren sich zu 1 (100 %).
- Die Summe der Wahrscheinlichkeiten unter jeder Verzweigung ist 1 (100 %).

Beispiel 1: Das Glücksrad wird zweimal gedreht.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man zweimal die Farbe Rot erhält?
Erstelle ein Baumdiagramm und berechne die gesuchte Wahrscheinlichkeit.



Lösung:
Die Wahrscheinlichkeit für die Farbe Rot beträgt $\frac{2}{3}$ bei der ersten und $\frac{2}{3}$ bei der zweiten Drehung.



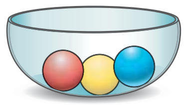
Multipliziere die Einzelwahrscheinlichkeiten, um die Wahrscheinlichkeit für zweimal Rot zu erhalten.

$P(\text{Rot; Rot}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

Hinweis:
Die Summe der Wahrscheinlichkeiten unter jeder Verzweigung ist 1.

Basisaufgaben

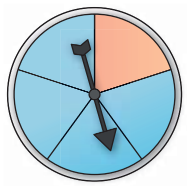
1. Karla zieht zweimal hintereinander eine Kugel und legt sie wieder zurück. Als Ergebnis notiert sie (Gelb; Gelb).



a) Was bedeutet das zusammengesetzte Ergebnis (Gelb; Gelb)?
Erstelle ein Baumdiagramm und beschreibe mit eigenen Worten.

b) Schreibe alle zusammengesetzten Ergebnisse auf, bei denen zuerst eine blaue Kugel gezogen wird. Notiere wie Karla.

2. Das Glücksrad wird zweimal gedreht.



a) Zeichne das zugehörige Baumdiagramm und trage die Wahrscheinlichkeiten an den Zweigen ein.

b) Welche zusammengesetzten Ergebnisse sind möglich?
Bestimme jeweils die Wahrscheinlichkeit.

c) Kontrolliere deine Rechnung, indem du prüfst, ob die Summe aller Wahrscheinlichkeiten 1 (100 %) ergibt.

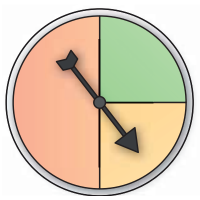
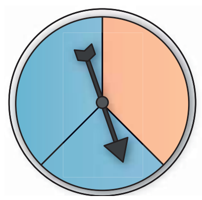
3. Jannes trifft den Korb beim Basketball-Freiwurf mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,6 und verfehlt ihn mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,4. Er wirft dreimal.

a) Zeichne ein Baumdiagramm mit Wahrscheinlichkeiten.

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Jannes dreimal trifft.

c) Berechne die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis (Korb; Korb; kein Korb).

4. Die beiden Glücksräder werden gleichzeitig gedreht.

a) Zeichne ein Baumdiagramm mit der Farbe des linken Glücksrads als 1. Stufe und mit der Farbe des rechten Glücksrads als 2. Stufe. Trage die Wahrscheinlichkeiten ein.

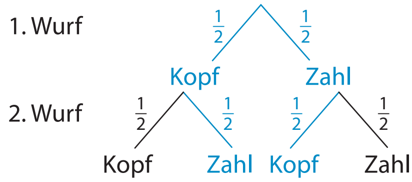
b) Zeichne ein Baumdiagramm mit der Farbe des rechten Glücksrads als 1. Stufe und mit der Farbe des linken Glücksrads als 2. Stufe. Trage die Wahrscheinlichkeiten ein.

c) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass beide Glücksräder Rot zeigen. Verwende einmal das Baumdiagramm in a) und einmal das in b). Vergleiche die Ergebnisse.

Pfadadditionsregel

Wirft man eine Münze zweimal, so gibt es zwei Möglichkeiten, einmal „Kopf" und einmal „Zahl" zu erhalten. Man wirft erst „Kopf" und dann „Zahl" oder umgekehrt: erst „Zahl", dann „Kopf". Man spricht hier von einem Ereignis, das aus mehreren Ergebnissen bestehen kann.

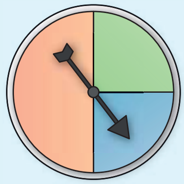
Entsprechend gibt es zum Ereignis „einmal Kopf, einmal Zahl" auch zwei Pfade im Baumdiagramm.
Die Wahrscheinlichkeit für „einmal Kopf, einmal Zahl" ergibt sich als Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Pfade.



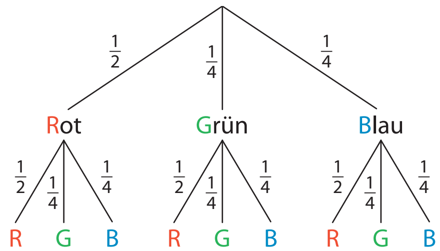
P(„einmal Kopf, einmal Zahl") = P(Kopf; Zahl) + P(Zahl; Kopf) $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Wissen: Pfadadditionsregel
Die **Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis** erhält man, indem man die Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Pfade addiert.

Beispiel 2: Ein Glücksrad wird zweimal gedreht.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man zweimal dieselbe Farbe erhält?



Lösung:
Es gibt drei Möglichkeiten: Zweimal erscheint Rot, zweimal erscheint Grün oder zweimal erscheint Blau.



Hinweis:
Man schreibt für ein Ereignis häufig kurz E und für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses P(E).

Die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Pfade werden einzeln berechnet und dann addiert.

E: zweimal dieselbe Farbe

$$P(E) = P(R;\,R) + P(G;\,G) + P(B;\,B)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{8} = 37{,}5\,\%$$

Basisaufgaben

5. Das Glücksrad aus Beispiel 2 wird dreimal gedreht. Schreibe alle zusammengesetzten Ergebnisse auf, die zu dem genannten Ereignis gehören.
Beispiel: „Insgesamt zweimal Blau und einmal Grün" besteht aus den Ergebnissen (Blau; Blau; Grün); (Blau; Grün; Blau); (Grün; Blau; Blau).

a) beim 1. und 2. Drehen Rot, beim 3. Drehen eine andere Farbe
b) dreimal Blau
c) drei verschiedene Farben
d) keine Farbe mehrfach
e) insgesamt genau zweimal Grün

6. Philipps Spielzeugkiste ist voll von Plastikschrauben: 20 mit dem Durchmesser 6 mm, 40 mit dem Durchmesser 8 mm und 60 mit dem Durchmesser 10 mm. In einer anderen Kiste befindet sich jeweils dieselbe Zahl von Muttern, die über die Schrauben von entsprechender Größe passen. Philipp entnimmt zufällig eine Schraube und eine Mutter. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass beide zusammenpassen.

7. Die Wahrscheinlichkeit für eine Jungengeburt beträgt ca. 51,3 %. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine Familie mit drei Kindern genau zwei Söhne? Zeichne zunächst ein Baumdiagramm.

Baumdiagramme mit abhängigen Stufen

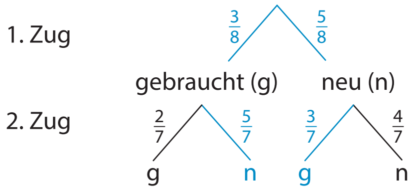
Beispiel 3: Aus einer Kiste mit fünf neuen und drei gebrauchten Tennisbällen werden zwei Bälle entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es ein gebrauchter und ein neuer Ball sind? Zeichne zunächst ein Baumdiagramm.

Lösung:
Du musst beim zweiten Zug berücksichtigen, dass der Ball nicht wieder zurückgelegt wird.

Es gibt zwei Fälle:

① Der zuerst gezogene Ball ist gebraucht. Dann gibt es noch 2 gebrauchte und 5 neue Bälle in der Kiste.

② Der zuerst gezogene Ball ist neu. Dann gibt es noch 3 gebrauchte und 4 neue Bälle in der Kiste.



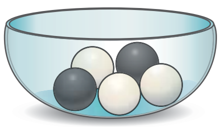
E: einmal gebraucht, einmal neu

$$P(E) = P(g; n) + P(n; g)$$
$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7}$$
$$= \frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{15}{28} \approx 54\,\%$$

Erinnere dich:
Die Summe der Wahrscheinlichkeiten unter jeder Verzweigung ist 1.

Basisaufgaben

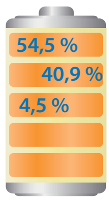
8. In einem Gefäß liegen drei weiße und zwei schwarze Kugeln. Zwei Kugeln werden nacheinander zufällig entnommen.



a) Zeichne ein Baumdiagramm und berechne die Wahrscheinlichkeit, dass zwei gleiche Kugeln gezogen werden, wenn gezogene Kugeln zurückgelegt (nicht zurückgelegt) werden.
b) Erkläre anschaulich, warum die Wahrscheinlichkeit in dem einen Fall größer ist.

9. In einem Behälter liegen 12 Glühlampen, darunter sind 3 defekte Glühlampen. Man entnimmt dem Behälter zwei Glühlampen. Zeichne ein Baumdiagramm und berechne die folgenden Wahrscheinlichkeiten.
a) Beide Glühlampen sind defekt.
b) Genau eine der beiden entnommenen Glühlampen ist defekt.
c) Beide Glühlampen funktionieren.

Hinweis zu 9:
Hier findest du die gerundeten Wahrscheinlichkeiten.

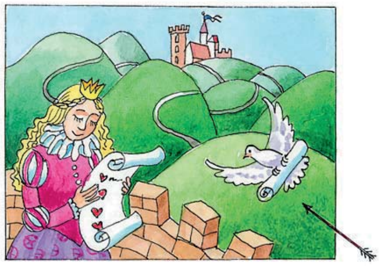


10. In der Klasse 8c sind 12 Jungen und 13 Mädchen. Zwei Schüler sollen aus der Klasse zufällig ausgewählt werden. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass man einen Jungen und ein Mädchen wählt. Zeichne zunächst ein Baumdiagramm.

Weiterführende Aufgaben

11. Drei Karten werden gemischt, sie enthalten die Ziffern 2, 3 und 7. Eine Karte wird gezogen und auf den Tisch gelegt. Danach wird eine zweite Karte gezogen und hinter die erste Karte gelegt, sodass eine zweistellige Zahl entsteht.
a) Zeichne ein Baumdiagramm. Welche zweistelligen Zahlen können entstehen? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl 37 zu sehen ist?
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zahl durch 9 teilbar ist.

12. Prinz Leo und Prinzessin Lea leben in einem fernen Land. Wenn die Prinzessin von ihrem Prinzen einen Brief erhält, schreibt sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 % einen Antwortbrief. Jetzt hat der Prinz ihr wieder einen Brief geschrieben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt er eine Antwort, wenn nur 80 % der abgeschickten Briefe wirklich zugestellt werden und der Rest auf dem Postweg verloren geht?



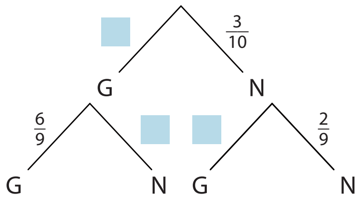
13. Stolperstelle: Stell dir vor, du hast zwei Beutel Lose. In einem Beutel gibt es zwei Nieten und einen Gewinn. Im zweiten Beutel befinden sich drei Nieten und drei Gewinne. Es wird zufällig ein Beutel ausgewählt und aus diesem ein Los gezogen.
Niklas überlegt: „Insgesamt gibt es vier Gewinne und neun Lose. Die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn ist also $\frac{4}{9}$."
Überlege, ob Niklas recht hat. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, indem du ein zweistufiges Baumdiagramm zeichnest.

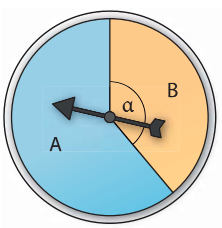
14. Ein Glücksrad mit den Farben Blau und Rot wird zweimal gedreht. Die zusammengesetzten Ergebnisse aus Blau und Rot haben folgende Wahrscheinlichkeiten:

Ergebnis	(Blau; Blau)	(Rot; Blau)	(Blau; Rot)	(Rot; Rot)
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{16}$

a) Erstelle das zugehörige Baumdiagramm.
b) Zeichne das Glücksrad.

15. a) Übertrage das Baumdiagramm ins Heft und ergänze die fehlenden Wahrscheinlichkeiten.
b) Erfinde zum Baumdiagramm eine passende Aufgabenstellung und berechne die Lösung.





16. Bei einem Glücksrad mit zwei unterschiedlich gefärbten Sektoren A und B beträgt die Größe des Winkels α = 140°. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass bei zweimaligem Drehen unterschiedliche Sektoren angezeigt werden.

17. In der Klasse 8d sind 15 Jungen und 15 Mädchen. Zwei Fünftel der Klasse tragen Ohrringe. Thommy behauptet: „Die Wahrscheinlichkeit für ein Mädchen ist $\frac{1}{2}$, die Wahrscheinlichkeit, dass es Ohrringe trägt, $\frac{2}{5}$. Also ist insgesamt die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällige Person ein Mädchen mit Ohrringen ist, $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$." Was meinst du dazu?

18. Ein Sportschütze trifft beim ersten Schuss mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,8. War der erste Versuch ein Treffer, so trifft der Schütze beim zweiten Versuch mit der gleichen Wahrscheinlichkeit. Geht der erste Schuss daneben, dann verringert sich die Treffsicherheit beim zweiten Versuch um 10 % des ursprünglichen Wertes. Der Schütze schießt zweimal. Berechne die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses: „Es wurde genau ein Treffer erzielt."

19. Sascha und Alexander sind für das Klassenbuch zuständig. Derjenige von beiden, der zuerst morgens in der Schule ist, bringt es vom Verwaltungsbereich in den Klassenraum. Für jeden von beiden gilt, dass er mit Wahrscheinlichkeit von 1 % zu spät kommt.

a) Berechne mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit, dass das Klassenbuch an einem bestimmten Schultag nicht pünktlich im Klassenraum ist.

b) Überlege, ob das rechnerische Ergebnis auch dann zutrifft, wenn Sascha und Alex Zwillinge sind.

● **20.** Nimm Folgendes an: Scheint an einem Tag die Sonne, so scheint am nächsten Tag mit Wahrscheinlichkeit von 80 % auch die Sonne, andernfalls regnet es. Regnet es an einem Tag, so wiederholt sich am nächsten Tag mit Wahrscheinlichkeit von 50 % dieses Wetter, sonst scheint die Sonne.

a) Heute scheint die Sonne. Markus will übermorgen eine Gartenparty geben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er mit dem Wetter Glück?

b) Es regnet am Donnerstag. Mirjam will jetzt den Termin für ihre kurzfristig geplante Gartenparty festlegen. Kann sie eher für Samstag oder für Sonntag mit schönem Wetter rechnen?

● **21.** Bei einem Tennisturnier wird über drei Gewinnsätze gespielt. Bei einem Spiel gewinnt derjenige Spieler, der zuerst drei Sätze gewinnt.

a) Beim Endspiel der Herren kann man davon ausgehen, dass der Favorit jeden Satz mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 % gewinnt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der vermeintlich schwächere Spieler beim Endspiel siegt?

b) Beim Herren-Doppel treffen im Finale zwei gleichstarke Teams aufeinander. Beim Stand von 2 : 1 muss die Partie abgebrochen werden und kann wegen schlechten Wetters nicht beendet werden. Wie soll die Siegprämie von 200 000 € aufgeteilt werden? Begründe deine Entscheidung, indem du die Gewinnwahrscheinlichkeiten betrachtest.

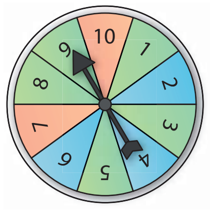
● **22. Ausblick:** 0,1 % der Bevölkerung hat eine bestimmte Allergie. Um festzustellen, ob man selbst davon betroffen ist, kann man einen Test machen. Der Test ist allerdings nicht fehlerfrei: Bei einem Prozent der Personen, die die Allergie nicht haben, zeigt der Test dennoch die Allergie an („falsch positiv"), umgekehrt hat der Test bei einem Prozent der Allergiker ein „falsch negatives" Ergebnis.

a) 100 000 Menschen machen einen Allergietest. Bestimme mit einem Baumdiagramm, welche zusammengesetzten Ergebnisse möglich sind und für wie viele der Getesteten diese Kombinationen jeweils zutreffen müssten.

b) Hannas Test ist „positiv", zeigt also die Allergie an. Bestimme mit dem Ergebnis aus a) die Wahrscheinlichkeit, mit der sie tatsächlich Allergikerin ist.

6.3 Sinnvoller Umgang mit Baumdiagrammen

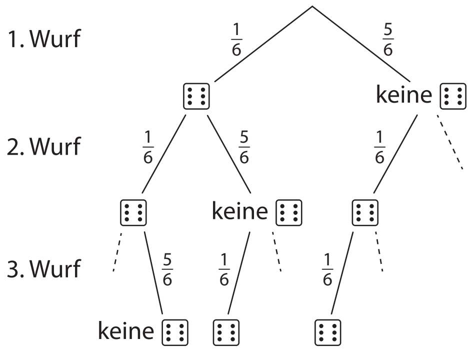
■ Jana und Jonas stehen auf dem Schulfest beim Glücksrad. Wer beim zweimaligen Drehen zweimal die 10 erhält, bekommt einen Preis. Jonas sagt: „Um die Wahrscheinlichkeit für einen Preis zu berechnen, müssen wir ein Baumdiagramm zeichnen.“ Jana meint: „Das geht nicht, es hat ja 10 · 10 Pfade.“ Kannst du das Rechenproblem lösen? ■



Verkürzte Baumdiagramme

Beispiel 1: Bestimme die Wahrscheinlichkeit, mit der beim dreifachen Wurf mit einem Spielwürfel genau zweimal eine 6 gewürfelt wird.

Lösung:
Es ist nicht nötig, im Baumdiagramm Pfade für alle Ergebnisse 1 bis 6 anzugeben, da nur das Ergebnis 6 interessiert. Es genügt, die beiden Fälle „6“ und „keine 6“ zu unterscheiden.
Zum Ereignis „genau zweimal 6“ gehören die drei zusammengesetzten Ergebnisse (6; 6; keine 6), (6; keine 6; 6) und (keine 6; 6; 6). Es ist ausreichend, nur die zugehörigen Pfade zu zeichnen und ihre Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen.



E: genau zweimal 6

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich durch Addition der Wahrscheinlichkeiten der drei Ergebnisse.

$$P(E) = P(6;\,6;\,\text{keine }6) + P(6;\,\text{keine }6;\,6) + P(\text{keine }6;\,6;\,6)$$
$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$$
$$= \frac{5}{216} + \frac{5}{216} + \frac{5}{216} = \frac{15}{216} \approx 6{,}9\,\%$$

Wissen: Sinnvoller Umgang mit Baumdiagrammen
Möchte man die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bestimmen, genügt es, nur den Teil des Baumdiagramms mit den zugehörigen Pfaden zu zeichnen.

Basisaufgaben

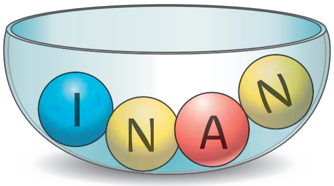
1. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass man jedes Mal eine Sechs erhält, wenn man viermal einen Spielwürfel wirft. Zeichne dazu nur den Teil eines Baumdiagramms, der für die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit nötig ist.

2. Bei einem Quiz sollen fünf gegebene Flüsse der Länge nach geordnet werden, vom kürzesten bis zum längsten. Ermittle, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein ahnungsloser Kandidat, der die Flüsse rein zufällig ordnet, die richtige Reihenfolge rät.

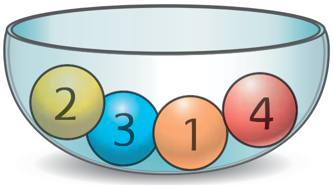
3. In einer Schale liegen vier Kugeln, die mit N, N, I, A beschriftet sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigen die Kugeln in der gezogenen Reihenfolge ihren Namen, wenn Ina genau dreimal zufällig zieht und

a) die Kugeln nach dem Ziehen zurücklegt,

b) die Kugeln nach dem Ziehen nicht zurücklegt?

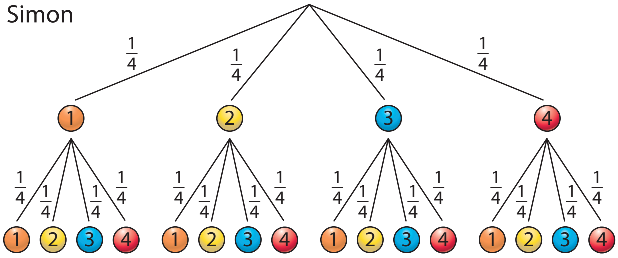


4. In einem Gefäß befinden sich vier Kugeln mit den Zahlen 1 bis 4. Es wird zweimal eine Kugel zufällig gezogen und wieder zurückgelegt. Die Schüler der Klasse 8a sollen berechnen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, erst eine gerade und dann eine ungerade Zahl zu ziehen.



a) Beurteile die Lösungen von Simon und Emma. Sind sie richtig? Worin unterscheiden sie sich?

Simon

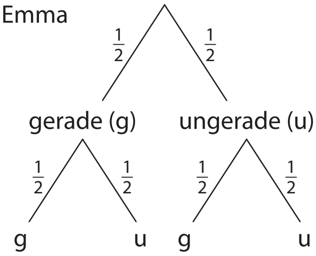


P(„erst gerade, dann ungerade")

$= P(2; 1) + P(2; 3) + P(4; 1) + P(4; 3)$

$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$

Emma



$P(g; u) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

b) Das Baumdiagramm von Elisa hat nur einen Pfad. Kann das richtig sein? Begründe.

Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses

Pascal ist Basketballfan. Sein Lieblingsteam benötigt in den nächsten beiden Spielen zwei Siege. Er nimmt an, dass das Team jedes Spiel mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 % gewinnt. Nun möchte er die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse berechnen.

E_1: Das Team gewinnt beide Spiele.

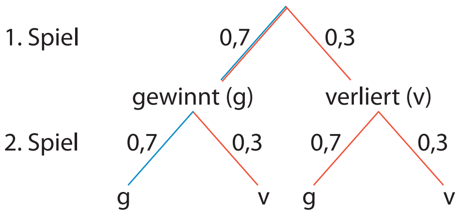
E_2: Das Team gewinnt höchstens ein Spiel.

Das Ereignis E_2 tritt genau dann ein, wenn das Ereignis E_1 nicht eintritt. Man sagt, E_2 ist das **Gegenereignis** zu E_1.

Aus dem Baumdiagramm sieht man:

$P(E_1) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}49 = 49\,\%$

$P(E_2) = 0{,}7 \cdot 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}7 + 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}51 = 51\,\%$



Zum Ereignis E_2 gehören genau die Pfade, die nicht zum Ereignis E_1 gehören. Da sich die Wahrscheinlichkeiten bei allen vier Pfaden zu 1 addieren, muss gelten: $P(E_1) + P(E_2) = 1$

Man kann daher die Wahrscheinlichkeit für E_2 auch so berechnen:

$P(E_2) = 1 - P(E_1) = 1 - 0{,}49 = 0{,}51$

Wissen: Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses

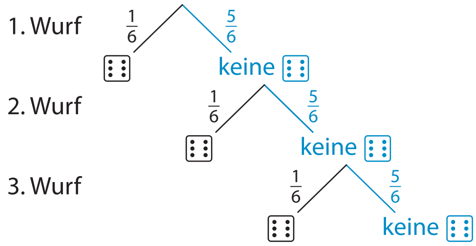
Das **Gegenereignis $\overline{E}$** zu einem Ereignis E tritt genau dann ein, wenn das Ereignis E nicht eintritt. Für seine Wahrscheinlichkeit gilt:

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$$

Beispiel 2: Bestimme die Wahrscheinlichkeit, mit der beim dreifachen Wurf mit einem Spielwürfel mindestens eine 6 gewürfelt wird.

Lösung:

Du kannst dir hier viel Arbeit sparen, indem du zunächst die Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis bestimmst, also die Wahrscheinlichkeit dafür, dreimal hintereinander keine 6 zu würfeln.



Im Baumdiagramm brauchst du nur den Pfad für das Gegenereignis zu zeichnen. Bei allen anderen Pfaden wird mindestens eine 6 gewürfelt.

Da die Summe der Wahrscheinlichkeiten von Ereignis und Gegenereignis 1 ist, kannst du nun die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass mindestens eine 6 gewürfelt wird, aus der Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis berechnen.

Gegenereignis $\overline{E}$: dreimal keine 6

$P(\overline{E}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{216} \approx 58\,\%$

Ereignis E: mindestens eine 6

$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216} \approx 42\,\%$

Basisaufgaben

5. Gib das Gegenereignis in Worten an.

a) Beim Werfen eines Spielwürfels kommt eine gerade Augenzahl.

b) Aus einem Beutel mit farbigen Kugeln wird eine gelbe Kugel gezogen.

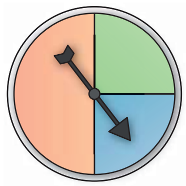
c) Eine zufällige natürliche Zahl zwischen 1 und 49 ist kleiner als 20.

d) Bei der zufälligen Auswahl zweier Schüler der Klasse 8a werden ein Mädchen und ein Junge gewählt.

6. Das Glücksrad wird zweimal gedreht und jeweils die Farbe notiert.

a) Bilde aus den sechs Ereignissen drei Paare bestehend aus einem Ereignis und einem Gegenereignis.

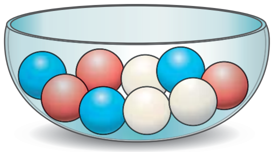
E_1: zwei gleiche Farben	E_2: höchstens einmal Rot
E_3: mindestens einmal Rot	E_4: nur Rot
E_5: nur Blau oder Grün	E_6: zwei verschiedene Farben



b) Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse aus a).

7. Eine Münze wird viermal geworfen. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass man mindestens einmal Zahl erhält.

8. In einem Gefäß liegen drei rote, drei blaue und drei weiße Kugeln. Viktoria zieht drei Kugeln ohne Zurücklegen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass sie
a) drei rote Kugeln,
b) mindestens eine rote Kugel zieht.



9. Bei der Produktion von Handyakkus sind durchschnittlich 2 % defekt. In einer Packung werden vier Akkus geliefert. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass in der Packung mindestens ein defekter Akku ist.

Weiterführende Aufgaben

10. In einer Lostrommel liegen 200 Lose, 50 davon sind Gewinnlose. Nicole kauft 4 Lose. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse?
a) kein Gewinnlos
b) genau ein Gewinnlos
c) mindestens ein Gewinnlos

11. Stolperstelle: Karim spielt häufig Schach gegen seinen Computer, aber meistens verliert er. Er überlegt: „Angenommen, ich gewinne jedes Spiel zu 10 %, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass ich bei fünf Spielen wenigstens einmal gewinne, fünfmal so hoch. Sie beträgt dann immerhin 50 %." Stimmt die Behauptung von Karim? Begründe deine Entscheidung mithilfe eines geeigneten Baumdiagramms.

12. Der Zimmerkellner eines Hotels soll vier Gästen Tabletts mit Frühstück vor die jeweilige Zimmertür abstellen, nämlich je eins mit französischem, holländischem, Gourmet-Frühstück und Fitness-Frühstück. Leider hat er völlig vergessen, welches Frühstück zu welchem Zimmer gehört und stellt die Tabletts zufällig vor den vier Türen ab. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stehen alle Tabletts vor dem richtigen Zimmer?

13. Silke ist Torhüterin im Fußball. Sie überlegt sich: „Bisher habe ich 20 % aller Elfmeter gehalten. Das bedeutet, dass ich im Durchschnitt von fünf Elfmetern genau einen halte."
a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Silke tatsächlich genau einen von fünf Elfmetern hält, wenn sie jeden Elfmeter mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % pariert. Schätze zunächst, bevor du rechnest.
b) Steht das Ergebnis von a) im Widerspruch zu Silkes Überlegung? Begründe deine Meinung.

14. Ein Multiple-Choice-Test hat drei Fragen. Pro Frage muss man richtig oder falsch ankreuzen. Eine Person, die die Antworten nicht weiß und deshalb rät, füllt den Test aus. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse.
a) alle Antworten richtig
b) mindestens eine Antwort falsch
c) höchstens eine Antwort falsch
d) richtige Antwort bei der ersten Frage
e) nur die erste Frage falsch
f) häufiger falsch als richtig geraten
g) die zweite Frage falsch
h) nicht nur falsch geraten
i) genauso oft richtig wie falsch geraten
j) häufiger richtig als falsch geraten

Hinweis zu 14:
Hier findest du die Lösungen.

15. Ein Würfel wird dreimal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme mindestens 5 beträgt.

16. Elias behauptet, dass auch der dreifache Münzwurf ein Laplace-Experiment ist. Überprüfe seine Behauptung, indem du ein Baumdiagramm zeichnest und für jedes zusammengesetzte Ergebnis die Wahrscheinlichkeit berechnest.

Hinweis zu 17:
Das gleichzeitige Würfeln kann auch stufenweise im Baumdiagramm dargestellt werden, als ob die Würfel einzeln nacheinander geworfen werden.

17. Zwei Würfel werden geworfen.
a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme 7 ist. Zeichne dazu ein zweistufiges Baumdiagramm.
b) In der Tabelle kann man alle möglichen Ergebnisse beim Werfen zweier Würfel darstellen. Zum Beispiel zeigt das grüne Feld das Ergebnis 5 und 3, das blaue Feld zeigt das Ergebnis 4 und 6. Beschreibe, wie man hiermit die Wahrscheinlichkeit für die Augensumme 7 berechnen könnte.
c) Berechne mithilfe der Tabelle die Wahrscheinlichkeit für die Augensumme 11.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

18. Galtonbretter sind Nagelbretter, bei denen kleine Kugeln an mehreren gleichartigen Nägeln nach links (L) bzw. rechts (R) abgelenkt werden. Beim einfachen Galtonbrett ist die Wahrscheinlichkeit für eine Links- bzw. Rechtsablenkung gleich.
a) Wo landen Kugeln, deren Weg sich beschreiben lässt mit LRRL oder RRLL?
b) Berechne die folgenden Wahrscheinlichkeiten.
① Die Kugel fällt nach ganz links.
② Die Kugel fällt in das zweite Fach von rechts.
c) Halte eine Präsentation über Galtonbretter. Informiere dich dazu im Internet. Präsentiere dabei auch die Aufgabe und deinen Lösungsweg.

19. Erik hat beim Mini-Biathlon eine Trefferquote von 90 % beim Liegend- und 75 % beim Stehendschießen. Es wird jeweils dreimal geschossen. Für jeden Fehlschuss muss man eine Strafrunde laufen. Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Erik
a) nach dem Liegendschießen keine Strafrunde laufen muss,
b) nach dem Stehendschießen zwei Strafrunden zu absolvieren hat,
c) in beiden Schießdurchgängen keinen Fehler macht.

20. Beim Roulette landet die Kugel in einem von 37 Fächern, die von 0 bis 36 nummeriert sind. Ein Spieler besitzt zu Beginn einen Chip und setzt diesen auf „Impair“, sodass er bei einer geraden Zahl seinen Einsatz verliert, bei einer ungeraden Zahl seinen Einsatz zurück- und einen zweiten Chip dazubekommt. Sofern er noch Chips hat, setzt er erneut einen auf „Impair“. Nach spätestens drei (vier) Spielen hört er auf. Ermittle, welche Zahl von Chips er dann besitzen kann und wie groß die Wahrscheinlichkeit dafür jeweils ist.

21. **Ausblick:** Max hat sechs der Zahlen von 1 bis 49 auf seinem Lottoschein angekreuzt und sieht sich jetzt die Ziehung der Lottozahlen im Fernsehen an. Ermittle mit einem vereinfachten Baumdiagramm die Wahrscheinlichkeit, dass er auf seinem Schein
a) sechs Richtige hat,
b) keine Zahl richtig hat.

Bananensuche

■ Der Affe hat Hunger und möchte sich Bananen holen, die auf den Inseln verteilt liegen. Es gelingt ihm immer dann, wenn das Würfelergebnis passt:
Die Differenz aus größerer und kleinerer Augenzahl ergibt die Zahl 0, 1, 2, 3, 4 bzw. 5 einer Insel. ■

Zwei Würfel werfen:

Differenz: 5 – 2 = 3
Der Affe kann eine Banane (●) von der Insel 3 nehmen.

Wissen: Spielregeln

Anzahl Spieler:
Spielt zu zweit oder zu dritt.

Je Spieler:

Material:
- Ihr benötigt zwei Spielwürfel.
- Das Spielfeld findet ihr auf der Rückseite des Buches. Jeder Spieler verwendet ein eigenes Spielfeld.
- Je Spieler werden 12 Chips, Münzen o. ä. benötigt. Sie stellen die Bananen dar.

Vorbereitung:
Jeder Spieler verteilt die 12 „Bananen“ auf die Inseln seines Spielfelds (siehe oben). Wie die Bananen verteilt werden, kannst du frei wählen.

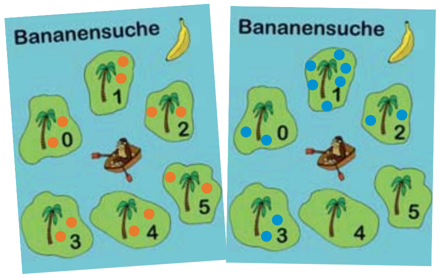
Spielverlauf:
1. Der jüngste Spieler beginnt.
2. Er würfelt mit zwei Würfeln.
3. Dann bildet er die Differenz aus der größeren und der kleineren Augenzahl. Sind beide Augenzahlen gleich, ist die Differenz 0.
4. Liegen auf der Insel mit der entsprechenden Zahl Bananen, dann kann man von dieser Insel eine Banane für den Affen wegnehmen. Liegt auf der Insel keine Banane, dann hat der Affe Pech …
5. Anschließend ist der nächste Spieler an der Reihe. Gewonnen hat der Spieler, der als Erster alle 12 Bananen von den Inseln seines Spielfelds eingesammelt hat.

Spielvariante 1: Merkwürdige Würfel
Es werden andere Würfel als normale Spielwürfel verwendet:
- zwei Tetraederwürfel
- ein Tetraederwürfel und ein normaler Spielwürfel
- zwei Streichholzschachteln, deren Flächen mit 1 bis 6 beschriftet sind.

Spielvariante 2: Würfelsumme
Beim Werfen zweier Würfel wird nicht die Differenz der Augenzahlen gebildet, sondern die Summe.

Beispiel 1: Rechts siehst du, wie Nico und Lara ihre Bananen verteilt haben. Wer hat die besseren Gewinnchancen? Begründe.

Nico: Lara:



Lösung:
Nico hat seine Bananen auf alle Inseln gleichmäßig verteilt. Er muss darauf warten, dass zweimal die Differenz 5 gewürfelt wird. Das passiert nur dann, wenn gleichzeitig eine 6 und eine 1 geworfen werden. Dies passiert aber nur relativ selten.
Lara weiß, dass die Differenz 1 häufiger auftritt als andere Differenzen. Deshalb hat sie viele Bananen auf der Insel 1 platziert.
Beide Spieler können gewinnen, aber Lara hat die besseren Gewinnchancen.

Aufgaben

1. Untersucht die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die Differenzen beim Würfeln auftreten.

Differenz	0	1	2	3	4	5
Strichliste						
Anzahl						
Anteil in %						

a) Würfelt 50-mal mit zwei normalen Würfeln und tragt die Ergebnisse in einer Tabelle ein.
b) Beantwortet zur Auswertung die folgenden Fragen:
   – Traten alle Differenzen mit der gleichen Häufigkeit auf?
   – Welche Differenz trat am häufigsten (am seltensten) auf? Wie groß war ihr Anteil etwa?
   – Ordnet die Differenzen nach der Häufigkeit ihres Auftretens.
c) Vergleicht die Ergebnisse in der Klasse. Was stellt ihr fest?
d) Berechnet die Wahrscheinlichkeiten für die Differenzen, zum Beispiel mithilfe eines Baumdiagramms.

2. Begründe, dass die Strategie, alle Bananen gleichmäßig zu verteilen, nicht optimal ist.

3. Welche Strategie hat die höheren Gewinnchancen?
A: Alle Bananen werden auf die Insel gesetzt, deren Zahl die größte Wahrscheinlichkeit hat.
B: Die Bananen werden entsprechend der berechneten Wahrscheinlichkeiten aus Aufgabe 1d auf die Inseln verteilt.

4. Arbeitet in kleinen Gruppen.
a) Testet eine der Spielvarianten 1. Beschreibt, wie sich der andere Würfel auf die Strategien auswirkt.
b) Entwerft ein passendes Spielfeld für die Variante Würfelsumme.

6.4 Vermischte Aufgaben

1. Jedes Jahr nehmen zehn Schulen an einem Schulwettbewerb teil. Die besten drei Schulen werden mit einer Gold-, einer Silber- und einer Bronzemedaille ausgezeichnet.

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es für die ersten drei Plätze?

b) Angenommen alle Schulen sind gleich gut und die Platzierung ist zufällig: Wie wahrscheinlich ist es dann, dass die ersten drei Plätze dieselben sind wie im letzten Jahr? Betrachte die Platzierung als Laplace-Experiment und berechne so die Wahrscheinlichkeit.

c) Bestimme die Wahrscheinlichkeit aus b) mit einem Baumdiagramm.

2. Einen Körper, der aus vier gleichseitigen Dreiecken besteht, nennt man Tetraeder. Beim Würfeln mit einem Tetraeder bleibt stets eine Spitze oben liegen. Die Augenzahlen auf einem solchen Spielwürfel sind deshalb an den Seitenflächen unten abzulesen.

Wie wahrscheinlich ist es, bei zweimaligem Würfeln jeweils eine gerade Augenzahl zu werfen? Zeichne ein Baumdiagramm und berechne die Wahrscheinlichkeit.

Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis beträgt $\frac{3}{16}$. Welches Ereignis könnte dieser Wahrscheinlichkeit zugrunde liegen?

Wie wahrscheinlich ist es, dass die Augensumme beim zweimaligen Würfeln durch 3 teilbar ist?

Das Ergebnis eines Wurfes mit zwei Tetraedern ist die Differenz der Augenzahlen. Hierbei gilt stets: größere minus kleinere Augenzahl. Stelle die möglichen Ergebnisse strukturiert (z. B. mithilfe einer Tabelle) dar und gib an, welche Differenz die größte Wahrscheinlichkeit hat.

3. Vivien fragt einen Passanten nach einer Straße. Der Passant ist zu 80 % ein Einheimischer. Während ein Einheimischer die Straße zu 80 % kennt, kennt eine andere Person sie nur zu 20 %. Bestimme die die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse.

a) Ein Einheimischer kennt die Straße nicht.

b) Der Passant ist ein Einheimischer, der die Straße nicht kennt.

c) Der Passant kennt die Straße nicht.

4. Alina hört die Playlist mit ihren vier Lieblingssongs. Da sie die Zufallswiedergabe eingestellt hat, werden die vier Titel in zufälliger Reihenfolge abgespielt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Reihenfolge der Titel die gleiche ist wie beim Mal davor?

b) Wie ändert sich diese Wahrscheinlichkeit, wenn die Playlist nicht vier, sondern neun Titel enthält?

5. a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, beim zweimaligen (viermaligen) Werfen eines Würfels wenigstens einmal eine Sechs zu würfeln.

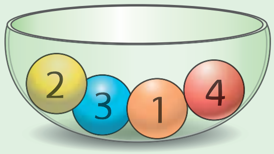
b) Bestimme, wie oft man einen Würfel werfen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 % wenigstens einmal eine Sechs zu würfeln.

c) Bestimme, wie oft man eine Münze werfen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 % wenigstens einmal Zahl zu werfen.

Lösungen
↗ S. 228

1. Ein Autohändler bietet einen Kleinwagen, eine Limousine, einen Kombi und ein SUV an. Jedes Modell ist in den Farben weiß, rot, grün, blau, silber und schwarz erhältlich.
a) Frau Rubin möchte ein rotes Auto kaufen. Zwischen wie vielen Modellen kann sie wählen?
b) Herr Groß interessiert sich für einen Kombi. Wie viele Wahlmöglichkeiten hat er?
c) Wie viele Autos muss der Händler ausstellen, wenn jedes Modell in jeder Farbe zu sehen sein soll?

2. In einer Schale liegen vier Kugeln mit den Ziffern von 1 bis 4. Es wird eine Kugel gezogen und deren Ziffer notiert. Von den restlichen Kugeln wird eine zweite gezogen und deren Ziffer hinter die erste Ziffer geschrieben.
Wie viele zweistellige Zahlen können dabei entstehen?
Zeichne ein Baumdiagramm mit allen Möglichkeiten.



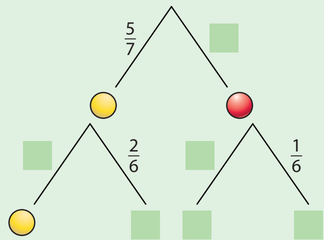
3. Herr Roward kauft zwei neue Glühlampen. Jede neue Glühlampe funktioniert zu 95 %, zu 5 % ist sie bereits defekt. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass beide Glühlampen defekt sind.

4. Ein Skatspiel enthält 32 Karten, unter denen acht Herz-Karten sind. Es wird dreimal zufällig eine Karte gezogen und gleich wieder in den Stapel zurückgesteckt.
a) Zeichne ein dreistufiges Baumdiagramm.
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass drei Herz-Karten gezogen werden.
c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass genau eine Herz-Karte gezogen wird.

5. In einem Gefäß befinden sich fünf gelbe und zwei rote Kugeln. Es werden nacheinander zufällig zwei Kugeln gezogen.
a) Vervollständige das Baumdiagramm im Heft.
b) Wird die erste gezogene Kugel wieder in das Gefäß zurückgelegt? Begründe.
c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kugeln verschiedenfarbig sind.

1. Kugel

2. Kugel



6. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass beim Werfen zweier Würfel die Augensumme mindestens 11 ist. Zeichne ein Baumdiagramm, das nur die Pfade enthält, die zum gesuchten Ereignis gehören.

7. Henri tippt beim Pferderennen den Sieger und den Zweitplatzierten. Da die zehn Pferde etwa gleich schnell sind, kann man annehmen, dass sie in zufälliger Reihenfolge ins Ziel kommen. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse.
a) Henri tippt den Sieger und den Zweitplatzierten richtig.
b) Henri tippt nur den Sieger richtig.
c) Henri tippt nur den Zweitplatzierten richtig.

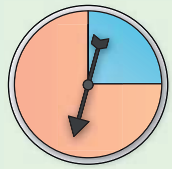
8. In einer Schublade liegen sechs blaue und sechs schwarze Socken. Xaver greift hinein und nimmt ohne hinzuschauen zufällig zwei Socken heraus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Socken die gleiche Farbe haben?

9. In einer Lostrommel befinden sich vier Lose, ein Gewinnlos und drei Nieten. Vier Kinder dürfen nacheinander je ein Los ziehen. Cansu behauptet: „Das erste Kind hat eine höhere Gewinnchance als alle anderen Kinder." Überprüfe dies mit einem Baumdiagramm.

10. Eine Münze wird dreimal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse. Erläutere, wie du vorgegangen bist.
a) Man erhält mehr als zweimal Zahl.
b) Man erhält mindestens einmal Zahl.
c) Man erhält höchstens zweimal Kopf.
d) Man erhält genau einmal Kopf.

11. Mira bearbeitet einen Multiple-Choice-Test mit vier Fragen. Bei jeder Frage gibt es drei Antwortmöglichkeiten, von denen genau eine richtig ist. Da Mira die Antworten nicht weiß, kreuzt sie bei jeder Frage zufällig eine Antwort an.
Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Mira mindestens eine Frage falsch beantwortet.

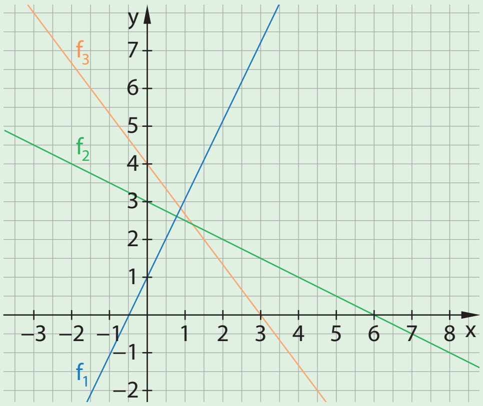
12. Das Glücksrad wird mehrmals gedreht. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Zeiger spätestens beim dritten Drehen auf Blau stehen bleibt.



Wiederholungsaufgaben

1. Bestimme die Lösung der Gleichung $4 \cdot (x+1) - 2 \cdot (x-1) = 4$.

2. Gib die Funktionsgleichungen zu den Funktionsgraphen an.



3. Peter erzählt seinem Freund: „In meiner Klasse sind 40 % Mädchen und 15 Jungen."
Berechne, wie viele Mädchen in seiner Klasse sind.

4. Zeichne ein Rechteck mit den Seitenlängen 2 cm und 5 cm und schraffiere darin
a) 60 % der Fläche,
b) $\frac{1}{4}$ der Fläche.

5. Finde die Fehler bei den folgenden Rechnungen und verbessere sie.
a) $\frac{2}{7} + \frac{3}{8} = \frac{5}{15}$
b) $\frac{4}{5} - \frac{1}{4} = \frac{3}{20}$
c) $\frac{8}{9} : \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$
d) $5 \cdot \frac{2}{9} = \frac{10}{45}$

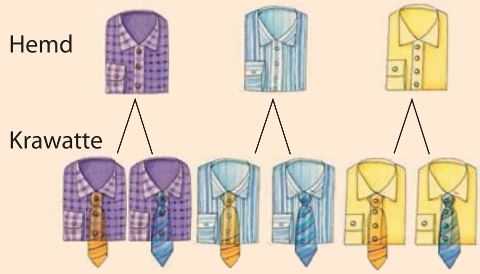
Zusammenfassung

Baumdiagramme, Zählprinzip

Ein Vorgang, aus dem sich unterschiedliche **Kombinationsmöglichkeiten** ergeben, kann gut in einem mehrstufigen **Baumdiagramm** dargestellt werden.
Die **Gesamtzahl der Möglichkeiten** entspricht der Anzahl der Baumenden.

Die Gesamtzahl ist das Produkt aus den Anzahlen der Möglichkeiten auf jeder Stufe.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, drei Hemden und zwei Krawatten zu kombinieren?

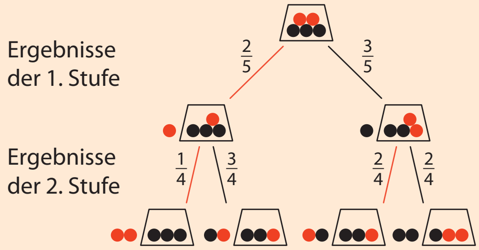


Es gibt $3 \cdot 2 = 6$ Möglichkeiten.

Mehrstufige Zufallsexperimente, Pfadregeln

Setzt sich ein Zufallsexperiment aus mehreren Teilexperimenten zusammen, so nennt man es **mehrstufiges Zufallsexperiment**.
Mehrstufige Zufallsexperimente kann man übersichtlich in einem Baumdiagramm darstellen. Zu jedem Pfad in einem Baumdiagramm gehört genau ein Ergebnis, das sich aus den Ergebnissen der Teilexperimente zusammensetzt.

Aus einer Urne mit drei schwarzen und zwei roten Kugeln werden zwei Kugeln gezogen:



Pfadmultiplikationsregel
Die **Wahrscheinlichkeit für ein zusammengesetztes** Ergebnis erhält man aus dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.

$P(\text{rot; rot}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10} = 0{,}1 = 10\,\%$

Pfadadditionsregel
Die **Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis** erhält man, indem man die Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Pfade addiert.

E: Beide Kugeln sind verschiedenfarbig

$P(E) = P(\text{rot; schwarz}) + P(\text{schwarz; rot})$
$= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10} = 0{,}6 = 60\,\%$

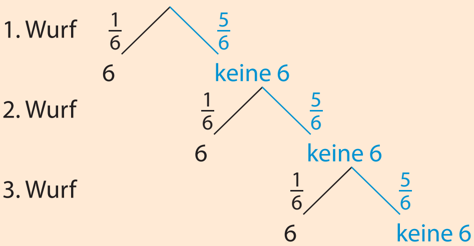
Gegenereignis, verkürzte Baumdiagramme

Manchmal ist es einfacher, die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses über das Gegenereignis zu bestimmen.
Das **Gegenereignis** $\bar{E}$ zu einem Ereignis E tritt genau dann ein, wenn das Ereignis E nicht eintritt. Für seine Wahrscheinlichkeit gilt:
$P(\bar{E}) = 1 - P(E)$

Möchte man die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bestimmen, genügt es, nur den Teil des Baumdiagramms mit den zugehörigen Pfaden zu zeichnen.

Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass beim dreifachen Wurf mit einem Spielwürfel mindestens eine 6 gewürfelt wird.

Ereignis E: mindestens eine 6
Gegenereignis $\bar{E}$: dreimal keine 6



$P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{91}{216} \approx 42\,\%$

Bildquellenverzeichnis

Einband U1 Picture Alliance/euroluftbild.de/Gerhard Launer | **175** Shutterstock/Branko Jovanovic | **176** Pic-ture Alliance/Robert Schles, o. | **176** Fotolia/Michael Tieck, u. | **177** Fotolia/Kristina Afanasyeva |
178 Fotolia/Syda Productions | **179** Deutsche Bundesbank, o. | **179** Shutterstock/FotymaFotyma, u. | **180** Deutsche Bundesbank | **185** Fotolia/ARochau, o. | **185** Shutterstock/Amma Cat, u. | **190** Picture Alliance/dpa| **191** Cornelsen Schulverlage GmbH/Berlin, l. | **191** Cornelsen Schulverlage GmbH/Berlin, r. | **193** Shutterstock/MilanB, o. | **193** Fotolia/Wouter Tolenaars, u. | **194** GlowImages/Aflo Sport | **197** Fotolia/savalan | **198** Dr. Ulrich Rasbach, Asbach, r., m., l. | **199** Shutterstock/Ilaszlo, o. | **199** Shutterstock/Goodluz, u. | **202** Shutterstock/MilanB, o. | **202** Shutterstock/ConstantinosZ, u. | **203** Fotolia/karelnoppe | **211** Shutterstock/Jon Milnes | **U4** Reinhard Schmidt/Hennef

Im Material wurde der TI-Nspire TM CX CAS verwendet. Das Produkt ist eingetragenes Warenzeichen von Texas Instruments.

Autoren: Dr. Frank Becker, Prof. Dr. Ralf Benölken, Dr. Detlef Dornieden, Dr. Lothar Flade, Daniel Geukes, Klara Götte, Anna-Kristin Kracht, Brigitta Krumm, Dr. Hubert Langlotz, Anne Mentzendorff, Thorsten Niemann, Dr. Andreas Pallack, Melanie Quante, Dr. Ulrich Rasbach, Nadeshda Rempel, Reinhard Schmidt, Christian Theuner, Dr. Christian Wahle, Florian Winterstein, Anne-Kristina Wolff, Dr. Wilfried Zappe

Berater: Günter Kämpfert, Stefan Schlie, Ulrike Siebert

Herausgeber: Dr. Andreas Pallack

Redaktion: Nils Dörffer, Matthias Felsch, Torsten Gebauer, Dr. Sonja Thiele

Illustration: Gudrun Lenz, Niels Schröder

Technische Zeichnungen: Christian Böhning

Umschlaggestaltung und Zwischentitel: hawemannundmosch, Berlin

Layoutkonzept: klein & halm GbR

Bildrecherche: Stephanie Charlotte Benner

Technische Umsetzung: zweiband.media, Berlin

www.cornelsen.de